ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XXV, zeszyt 1 — 1977

LUDWIK BORKOWSKI

*Profesor Dr Izydorze Dąmbskiej
z okazji Jej Jubileuszu*

W SPRAWIE INTUICYJNEJ INTERPRETACJI LOGIKI TRÓJWARTOŚCIOWEJ ŁUKASIEWICZA

1. Intuicyjną interpretację zbudowanego przez siebie trójwartościowego rachunku zdań omawiał Łukasiewicz w artykule ⟨1⟩, a następnie obszerniej w artykule ⟨4⟩, opublikowanym po jego śmierci. Nawiązując do interpretacji Łukasiewicza podanej w ⟨4⟩ J. Słupecki w artykule ⟨7⟩ podejmuje próbę jej dokładniejszego usystematyzowania, polegającą na sformułowaniu pewnych założeń dotyczących zdarzeń, relacji opisywania zdarzeń przez zdania i związku przyczynowego, a następnie na udowodnieniu na podstawie tych założeń i odpowiednich definicji twierdzeń o związkach podanych w tabelkach funktorów trójwartościowego rachunku zdań Łukasiewicza.

W ⟨7⟩ używa się zmiennych f, f_1, f_2 jako zmiennych przebiegających zbiór wszystkich zdarzeń, zmiennej g jako zmiennej przebiegającej zbiór wszystkich zdarzeń minionych lub z chwili obecnej, wyrażenia „$p * f$" jako wyrażenia stwierdzającego, że zdanie „p" opisuje zdarzenie f, wyrażenia „$f \mapsto f_1$" jako wyrażenia stwierdzającego, że zdarzenie f jest przyczyną zdarzenia f_1, a znaków: $+$, $\cdot$, $'$ jako znaków sumy, iloczynu i dopełnienia zdarzeń.

Za pomocą tych oznaczeń zapisuje się założenia:

1. $\bigwedge_p \bigvee_f (p * f)$
2. $(p * f) \wedge (p_1 * f_1) \rightarrow (A\ p\ p_1 * f + f_1)$
3. $(p * f) \wedge (p_1 * f_1) \rightarrow (K\ p\ p_1 * f \cdot f_1)$
4. $(p * f) \rightarrow (N\ p * f')$
5. $(f \mapsto f_1 + f_2) \equiv (f \mapsto f_1) \vee (f \mapsto f_2)$
6. $(f \mapsto f \cdot f_2) \equiv (f \mapsto f_1) \wedge (f \mapsto f_2)$
7. $\bigvee_f (f \mapsto f_1) \rightarrow \sim \bigvee_f (f \rightarrow f_1')$
8. $(f_1 \mapsto f) \rightarrow (f_1 \cdot f_2 \mapsto f)$

9. $(f_1 = f_2) \wedge (f_1 \mapsto f) \rightarrow (f_2 \mapsto f)$

10. $\bigvee_g (g \mapsto f \cdot f_1) \equiv \bigvee_g (g \mapsto f) \wedge \bigvee_g (g \mapsto f_1)$

Założenie 8 stwierdza, że jeśli zdarzenie f_1 jest przyczyną zdarzenia f, to również iloczyn zdarzenia f_1 i dowolnego zdarzenia f_2 jest przyczyną zdarzenia f. Otóż należy stwierdzić, że założenie 8 budzi poważne wątpliwości. Konsekwencją założenia 8 jest bowiem wyrażenie:

a) $(f \mapsto f) \rightarrow (f_1 \cdot f_1' \mapsto f)$ [1]

A więc z 8 wynika, że zdarzenie niemożliwe jest przyczyną dowolnego zdarzenia mającego jakąś przyczynę.

Konsekwencja taka jest nie do przyjęcia, a więc i założenie 8 należy odrzucić.

W ⟨7⟩ w związku ze wzorem 8 zauważa się, że Łukasiewicz rozumie stosunek przyczynowy jako stosunek konieczny: po przyczynie skutek następuje „niezawodnie".

Odrzucając 8 można by to ostatnie zdanie zapisać następująco:

b) $(p_1 * f_1) \wedge (p * f) \rightarrow [(f_1 \mapsto f) \rightarrow (p_1 \rightarrow p)]$

Z b wynika:

c) $(p_1 * f_1) \wedge (p_2 * f_2) \wedge (p * f) \rightarrow [(f_1 \mapsto f) \rightarrow (p_1 \wedge p_2 \rightarrow p)]$

Wyrażenie b można odczytać jako wyrażenie stwierdzające, że jeśli f_1 jest przyczyną f, to jeśli istnieje f_1, to istnieje f. Wyrażenie b można traktować jako nie budzące zastrzeżeń natury intuicyjnej ujęcie za pomocą formalizmu wprowadzonego w ⟨7⟩ stwierdzenia, że „po przyczynie następuje niezawodnie skutek".

Jednakże w dowodach podanych w ⟨7⟩ wyrażenie b nie może zastąpić założenia 8.

Założenie 8 jest wykorzystane w ⟨7⟩ tylko do dowodu wzoru

11. $\bigvee_g (g \mapsto f \cdot f_1) \equiv \bigvee_g (g \mapsto f) \wedge \bigvee_g (g \mapsto f_1)$,

mianowicie do dowodu implikacji odwrotnej odpowiadającej równoważności 11.

Wydaje się, że 11 nie budzi tych zastrzeżeń natury intuicyjnej co 8. Nasuwa się więc myśl, żeby zamiast 8 przyjąć 11 jako jedno z założeń do-

[1] Zwrócił na to uwagę mgr Toshiharu Waragai na seminarium z logiki prowadzonym przeze mnie w r. 1975/76.

wodów podanych w ⟨7⟩. Trzeba jednak odeprzeć wątpliwość, czy 11 nie jest równoważne z 8 na gruncie pozostałych założeń. Otóż można wykazać metodą interpretacji, że 8 nie daje się wyprowadzić z 11 i pozostałych założeń. Traktując mianowicie zmienne f, f_1, f_2, g jako zmienne zdaniowe i interpretując znaki: $\mapsto$, $=$, $+$, $\cdot$, $'$, $*$, A, K, N odpowiednio jako znaki: $\wedge$, $\equiv$, $\vee$, $\wedge$, $\sim$, $\equiv$, $\vee$, $\wedge$, $\sim$ otrzymujemy z założeń 1-7, 9, 11 tezy klasycznego rachunku zdań z kwantyfikatorami, a z 8 wyrażenie fałszywe tego rachunku. A więc wyrażenie 8 nie jest konsekwencją wyrażeń 1-7, 9, 11.

2. W dyskusji nad referatem Łukasiewicza na zjeździe w Zürichu w 1938 r. (por. ⟨2⟩) padały krytyczne uwagi w związku z sensem intuicyjnym implikacji trójwartościowej. W ⟨7⟩ z przyjętych założeń i odpowiednich definicji wyprowadza się tabelki dla modalnych funktorów możliwości (M) i konieczności (L). Implikacja trójwartościowa Łukasiewicza może być zdefiniowana za pomocą funktorów A, N, K, M. W ⟨8⟩ wprowadza się implikację zdefiniowaną za pomocą A, N, L o tabelce:

	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

System z ⟨8⟩ jest równoważny z implikacyjno-negacyjnym trójwartościowym systemem Łukasiewicza. W ten sposób unika się kwestii związanych z sensem intuicyjnym implikacji trójwartościowej.

Czy wobec tego problem intuicyjnej interpretacji logiki trójwartościowej Łukasiewicza można uważać za wyczerpany?

W problemie tym należy odróżnić dwa zagadnienia:

1. Zagadnienie wyprowadzenia tabelek funktorów trójwartościowej logiki Łukasiewicza z dokładnie sformułowanych założeń odpowiadających intencjom Łukasiewicza.
2. Zagadnienie, czy uzyskany w ten sposób system nie budzi poważnych zastrzeżeń natury intuicyjnej.

Wydaje się, że wywody zawarte w ⟨7⟩, z modyfikacją omówioną w p. 1, stanowią rozwiązanie pierwszego z tych zagadnień.

Nie wynika jednak z tego, że można dać twierdzącą odpowiedź na drugie pytanie.

Najpoważniejszy argument za negatywną odpowiedzią na to pytanie przytoczył moim zdaniem A. N. Prior w ⟨5⟩, s. 135.

Mianowicie w trójwartościowej logice Łukasiewicza koniunkcja dwóch zdań o trzeciej wartości logicznej ma trzecią wartość logiczną również w przypadku, gdy jedno z nich jest negacją drugiego. Jeśli zdanie „Jutro będzie bitwa morska" ma trzecią wartość logiczną, to i jego negacja ma też trzecią wartość logiczną, a więc i ich koniunkcja miałaby też trzecią wartość logiczną. Wydaje się to niezgodne z intuicją skłaniającą nas do przyjęcia, że koniunkcja „Jutro będzie bitwa morska i jutro nie będzie bitwy morskiej" jest po prostu fałszywa.

Argument ten wydaje się nie do odparcia.

Uzupełniając argumentację Priora zauważymy, że w logice trójwartościowej Łukasiewicza mamy:

K	M	p	M	N	p
0	1	1	0	0	1
1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	1	1	0

M	K	p	N	p
0	0	1	0	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	1	0

A więc w logice tej wyrażenia K M p M N p, M K p N p dla tej samej wartości zmiennej mają te same wartości. Tezą tej logiki jest więc implikacja

d) C K M p M N p M K p N p

i ogólniej, tezą jest każde wyrażenie

e) F K M p M N p M K p N p,

gdzie „F" jest jakimś funktorem implikacji lub równoważności spełniającym warunki: $F11 = 1$, $F00 = 1$, $F1w = 1 \rightarrow w = 1$, a więc np. funktorem implikacji z ⟨8⟩ lub nawet implikacji zdefiniowanej wyrażeniem N K p N q.

Można też sprawdzić, że także wyrażenia K M p M q, M K p q dla tych samych układów wartości logicznych zmiennych przyjmują te same wartości w logice trójwartościowej Łukasiewicza, a więc tezą tej logiki jest wyrażenie:

f) C K M p M q M K p q

lub ogólniej:

g) F K M p M q M K p q

Teza d jest podstawieniem tezy f, teza e — podstawieniem tezy g.

Otóż wyrażenia d, f wydają się nie do przyjęcia, jeśli przyjmujemy

istnienie zdań o trzeciej wartości logicznej, a przy tym koniunkcję takich dwóch zdań sprzecznych uważamy za fałszywą. Nie są też one tezami w żadnym z systemów Lewisa, Feysa czy von Wrighta. Wprawdzie Łukasiewicz w ⟨3⟩ próbuje podać argumenty przemawiające za przyjęciem wyrażenia f jako tezy, ale argumentacja ta nie jest przekonująca.

Jeśli koniunkcję dwóch zdań sprzecznych uważamy za fałszywą, to trzeba przyjąć, że alternatywa A p N p — jako równoważna wyrażeniu N K N p N N p — jest prawdziwa również wtedy, gdy jej człony mają trzecią wartość logiczną. Jest to zgodne ze stanowiskiem Arystotelesa, który uważał alternatywę „Jutro będzie bitwa morska albo jutro nie będzie bitwy morskiej" za prawdziwą, mimo że jej człony mają trzecią wartość logiczną [2].

3. Powstaje pytanie, jak można by zmodyfikować pewne założenia ujęte w ⟨7⟩, by uwzględnić uwagi podane w p. 2, i jaki system otrzymamy w wyniku takiej modyfikacji.

W ⟨7⟩ w dowodach twierdzeń o związkach charakteryzujących tabelki funktorów logiki trójwartościowej oprócz wymienionych powyżej założeń wykorzystuje się założenia dotyczące zdarzeń i definicje Df. 1-5, 12-15.

Pojęcie zdarzenia jest rozumiane w ⟨7⟩ w ten sposób, że jeśli f jest zdarzeniem, to $f \cdot f'$ i $f + f'$ są zdarzeniami. Pierwsze z nich zwykło się nazywać zdarzeniem niemożliwym, drugie koniecznym.

Aby uzyskać wniosek, że koniunkcja K p N p ma wartość 0, zaś alternatywa A p N p ma wartość 1 również wtedy, gdy ich człony nie mają ani wartości 1, ani 0, wystarczy zmodyfikować Df.1 w następujący sposób:

$$\text{Df. 1}'.\quad D(f) \equiv \bigvee_{f_1} (f = f_1 + f_1') \vee \bigvee_{g} (g \mapsto f)$$

Stąd na podstawie dwóch praw algebry Boole'a przyjętych w ⟨7⟩ otrzymujemy:

$$D(f') \equiv \bigvee_{f_1} (f = f_1 \cdot f_1') \vee \bigvee_{g} (g \mapsto f')$$

W pozostałych definicjach występujących w ⟨7⟩ symbol „D" będzie rozumiany w sensie ustalonym w Df.1'. Wtedy w myśl Df.3 i Df.4:

$$(p \ast f) \rightarrow [1(p) \equiv \bigvee_{f_1} (f = f_1 + f_1') \vee \bigvee_{g} (g \mapsto f)]$$

$$(p \ast f) \rightarrow [0(p) \equiv \bigvee_{f_1} (f = f_1 \;\; f_1') \vee \bigvee_{g} (g \mapsto f')]$$

A więc zdanie ma wartość 1, gdy zdarzenie opisywane przez to zdanie jest sumą dwóch zdarzeń sprzecznych lub gdy istnieje przyczyna tego zdarzenia. Zdanie ma wartość 0, gdy zdarzenie opisywane przez to zdanie jest

[2] Por. Arystoteles. *Kategorie. Hermeneutyka.* Warszawa 1975 s. 65.

niemożliwe (jest iloczynem dwóch zdarzeń sprzecznych) lub istnieje przyczyna zdarzenia sprzecznego z nim.

Dopuszczamy przy tym przypadek, że istnieją takie zdania, które nie mają ani wartości 1, ani 0 i których koniunkcja też nie ma ani wartości 1, ani 0, np. zdania: Za rok o tej porze będę w Warszawie. Za rok o tej porze będę w teatrze.

Z Df.1′, Df.2-4 wynika, że zdanie nie ma ani wartości 1, ani 0, gdy zdarzenie f opisywane przez to zdanie spełnia warunek $\bar{D}(f)$, tj. gdy:

$$\sim \bigvee_{f_1}(f=f_1+f_1')\wedge \sim \bigvee_{f_1}(f=f_1\cdot f_1')\wedge \sim \bigvee_{g}(g \mapsto f)\wedge \sim \bigvee_{g}(g \mapsto f').$$

Zdania opisujące takie zdarzenia dzielimy na dwie rozłączne klasy w następujący sposób: Jeśli jakieś zdanie należy do jednej z tych klas, to jego negacja należy do drugiej. Koniunkcja dwóch zdań należących do tej samej klasy należy do tej samej klasy. Koniunkcja dwóch zdań należących do różnych klas jest fałszywa. Alternatywa dwóch zdań należących do tej samej klasy należy do tej samej klasy. Alternatywa dwóch zdań należących do różnych klas jest prawdziwa. Przyjmiemy, że zdania należące do jednej z tych klas mają wartość 2, a zdania należące do drugiej mają wartość 3.

Przyjmując zatem, że koniunkcja dwóch zdań o wartości różnej od 1 i 0 może mieć w pewnych przypadkach wartość 0, a w innych wartość różną od 1 i 0, trzeba przyjąć, że istnieją co najmniej dwie wartości różne od 1 i 0. Dochodzimy więc do potrzeby wprowadzenia czterech wartości logicznych.

Użyjemy symbolu 4 dla oznaczania fałszu, a symboli 2 i 3 dla oznaczania wartości logicznych różnych od prawdy i fałszu. Wtedy Df.2, Df.3, 12, 14 pozostają bez zmiany, w Df.4, 13, 15 zastępujemy symbol 0 symbolem 4, a zamiast Df.5 przyjmujemy warunki:

$$(p \ast f) \rightarrow [2\,(p) \vee 3\,(p) \equiv \bar{D}\,(f)]$$
$$2\,(p) \equiv 3\,(N\,p)$$
$$2\,(p) \wedge 2\,(p_1) \rightarrow 2\,(K\,p\,p_1) \wedge 2\,(A\,p\,p_1)$$
$$3\,(p) \wedge 3\,(p_1) \rightarrow 3\,(K\,p\,p_1) \wedge 3\,(A\,p\,p_1)$$
$$2\,(p) \wedge 3\,(p_1) \vee 3\,(p) \wedge 2\,(p_1) \rightarrow 4\,(K\,p\,p_1) \wedge 1\,(A\,p\,p_1)$$

Na podstawie tych wzorów i pozostałych założeń otrzymujemy następującą matrycę:

K	1	2	3	4	N	M	L
1	1	2	3	4	4	1	1
2	2	2	4	4	3	1	4
3	3	4	3	4	2	1	4
4	4	4	4	4	1	4	4

A	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
4	1	2	3	4

Matryca ta pokrywa się z matrycą, którą podaje A. N. Prior w ⟨6⟩ na s. 22. Podana jest tam pewna intuicyjna interpretacja tej matrycy. Dla funktora C zdefiniowanego przez wyrażenie N K p N q otrzymujemy tabelkę:

C	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	1	3	3
3	1	2	1	2
4	1	1	1	1

Rozważana matryca sprawdza wszystkie tezy systemu S5. Nie sprawdza ani wyrażenia d, które dla p = 2 lub p = 3 przyjmuje wartość 4, ani wyrażenia f, które dla p = 2, q = 3 lub dla p = 3, q = 2 przyjmuje wartość 4. Matryca ta dla C i N pokrywa się z matrycą Ł-fodalnego systemu Łukasiewicza z ⟨3⟩. Różni się od tej ostatniej tabelkami dla funktorów modalnych. Rozważaną matrycę dla funktorów N, K, A, C można otrzymać przez przemnożenie dwóch matryc dwuwartościowych. Stąd wynika, że sprawdza ona wszystkie (i tylko) tezy klasycznego rachunku zdań zapisane przy pomocy tych funktorów.

Dla równoważności E p q, określonej przez wyrażenie K C p q C q p, otrzymujemy tabelkę:

E	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

Dla p = 3, q = 4 wyrażenie C E p q E M p M q ma wartość 3. Dla p = 1, q = 2 wyrażenie C E p q E L p L q ma wartość 3. A więc w systemie określonym przez rozważaną matrycę funktory modalne M, L nie są ekstensjonalne.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że zachowując koncepcję zdań o wartości różnej od 1 i 0 i uwzględniając uwagi podane w p. 2 trzeba od logiki trójwartościowej przejść do logiki co najmniej czterowartościowej, a w wyniku rozważanych modyfikacji otrzymujemy system istotnie różny od trójwartościowego systemu Łukasiewicza.

BIBLIOGRAFIA

1. Łukasiewicz J.: Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls. „Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie" Cl. III 23:1930.

2. Łukasiewicz J.: Die Logik und das Grundlagenproblem. W: Les éntretiens de Zürich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques 6-9, 12. 1938. Zürich 1941.
3. Łukasiewicz J.: A System of Modal Logic. „The Journal of Computing Systems" 1:1953 No 3.
4. Łukasiewicz J.: O determinizmie. W: Z zagadnień logiki i filozofii. Warszawa 1961.
5. Prior A. N.: Past, Present and Future. Oxford 1967.
6. Prior A. N.: Time and Modality. Oxford 1957.
7. Słupecki J.: Próba intuicyjnej interpretacji logiki trójwartościowej Łukasiewicza. W: Rozprawy logiczne. Księga pamiątkowa ku czci profesora Kazimierza Ajdukiewicza. Warszawa 1964.
8. Słupecki J., Bryll G., Prucnal T.: Some Remarks on Threevalued Logic of Łukasiewicz. „Studia Logica" 21:1967.

O determinizmie oraz polski przekład ⟨1⟩ i ⟨3⟩ ukazały się w wyborze pism: J. Łukasiewicz. *Z zagadnień logiki i filozofii.* Warszawa 1961.

ON THE INTUITIVE INTERPRETATION OF ŁUKASIEWICZ'S THREE-VALUED LOGIC

Summary

Two questions dealing with the intuitive interpretation of Łukasiewicz's three-valued logic are discussed in the paper. It is shown that one assumption used in deriving the truth-tables for three-valued functors is not intuitive and can be replaced by a more intuitive assumption. The question is also discussed what system we obtain if we assume that the conjunction of two contradictory propositions is false and their alternation is true in the case when both propositions have a third logical value.